ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задачи по математике, предлагаемые для занятий в Летней школе, разбиты на несколько разделов. Каждый раздел состоит из кратких справочных сведений, многие из которых могут быть известны Вам из курса общеобразовательной школы, и задач. При этом задачи, отмеченные знаком (о), обязательны для изучения, а остальные - в зависимости от желания и наличия времени.

1. ДЕЛИМОСТЬ

Задачи данного раздела связаны с целыми и натуральными числами и такими понятиями, как делимость одного числа на другое (без остатка), деление с остатком, взаимно простые числа, простое число.

Определение. Целое число a делится на целое число $b \neq 0$, если существует такое целое число c, что $a = b \cdot c$. Кратко пишут $a \,\vdots\, b$.

Основные свойства делимости

1. Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.
2. Если a делится на c и b делится на c, то $a + b$ делится на c и $a - b$ делится на c.
3. Если a делится на c и b – целое число, то ab делится на c.
4. Если $a_1 \,\vdots\, c, \dots, a_n \,\vdots\, c$, то для любых целых чисел $r_1, \dots, r_n$ имеем $(r_1 a_1 + \dots + r_n a_n) \,\vdots\, c$.
5. Если a делится на c, а b не делится на c, то $a \pm b$ не делится на c.

Деление с остатком

Определение. Разделить целое число a на целое число $b \neq 0$ с остатком – это значит найти два целых числа q и r таких, чтобы выполнялись условия:

a) $a = bq + r$,

b) $0 \leq r < |b|$.

Число q называют неполным частным, а r – остатком.

Деление с остатком a на $b \neq 0$ всегда возможно и притом единственным способом.

Определение. Числа a и b при делении на m дают одинаковые остатки тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на m.

1) они имеют одинаковые остатки при делении на m: $a = mk_1 + r$, $b = mk_2 + r$, либо

2) $a - b$ делится на m без остатка.

Простые и взаимно простые числа

Натуральное число p называется простым, если оно больше 1 и имеет лишь два делителя: 1 и p. Если p имеет больше двух делителей, оно называется составным.

Натуральные числа p и q называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, кроме 1 : $НОД(p, q)=1$.

Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число, большее 1, раскладывается в произведение простых сомножителей $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, причем единственным образом, с точностью до порядка сомножителей $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$.

Линейные диофантовы уравнения

Определение. Линейным диофантовым уравнением называется уравнение с несколькими неизвестными вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c$, где (известные) коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ и c – целые числа, а неизвестные $x_1, \dots, x_n$ также являются целыми числами. К решению подобных уравнений сводятся разнообразные текстовые задачи. Мы ограничимся рассмотрением уравнений с двумя неизвестными вида $ax + by = c$.

Теорема. Любое уравнение $ax + by = c$, где $НОД(a; b) = 1$, имеет бесконечно много решений в целых числах, которые описываются формулой $x = x_0 + bk,\ y = y_0 - ak$, где x_0, y_0 – частное решение и $k \in Z$.

Задачи

1.(о) Докажите признак делимости на 3 и на 11.

2. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{64X5Y}$ ($X,\ Y$ – цифры), делящиеся на 36.

3.(о) Доказать, что при любом натуральном n

а) число $(n^2 + 5)$ делится на 6;

б) число $(n^3 + 2n)$ делится на 3;

в) число $(7^{2n} - 1)$ делится на 8;

г)(о) число $(n^2 + 1)$ не делится на 3.

4.(о) Найти остаток от деления а) 2^{2016} на 3; б) 3^{2016} на 7.

5. Найти две последние цифры чисел а) 3^{2106}; б) 7^{2016}.

6. Доказать, что $2^{70} + 3^{70}$ делится на 13.

7. Доказать, что если p и q – простые числа, большие 3, то $p^2 - q^2$ делится на 24.

8. Дано $56a = 65b$. Доказать, что $(a + b)$ – составное число.

9. Три простых числа p, q и r, большие 3, образуют арифметическую прогрессию: $p,\ q = p + d,\ r = p + 2d$. Доказать, что d делится на 6.

10.(о) Доказать, что простое число не может являться суммой кубов двух натуральных чисел.

11.(о) Найти все натуральные *n*, для которых сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ при делении на 5 дает остаток 1.

12. Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами равняться 131.

13. Докажите, что если целое число *n* не делится на 5, то его квадрат, уменьшенный или увеличенный на 1, делится на 5.

14. Остаток от деления некоторого натурального числа *n* на 6 равен 4, остаток от деления *n* на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления *n* на 30?

15. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8. Сколько чисел написано на доске?

16. Доказать, что два последовательных натуральных числа взаимно просты.

17. Пусть p – простое число. Доказать, что $8p + 1$ простое число лишь при $p = 3$.

18. Числа p и q взаимно просты. Будут ли взаимно простыми:

а) p и $p + q$;

б) p и $2p + 3q$;

19. Доказать, что при любом натуральном n числа $21n + 4$ и $14n + 3$ взаимно простые.

20.(о) Определить, при каких натуральных n дробь $\frac{14n+19}{2n+1}$ принимает целые значения.

21.(о) Определить при каких натуральных n дробь $\frac{5n+7}{2n+1}$ будет сократимой.

22.(о) Найти все решения в целых числах

а) $2015x + 2016y = 2016$; б) $9x - 13y = 7$;

в) $24x - 33y = 15$; г) $77x + 45y = 31$;

д) $28x - 63y = 51$.

23.(о) Решить в целых числах уравнение $x^3 - y^3 = 91$.

24.(о) Решить в целых числах уравнение $xy + 7y - 2x = 27$.

25.(о) Решить в натуральных числах уравнение

а) $5n + 13 = k^2$;

б) $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = k^2$.

26. Требуется на 1000 рублей купить 40 штук почтовых марок – 10-рублевых, 40 - рублевых и 120 - рублевых. Сколько окажется марок каждого достоинства?

27. Папа Карло выстрогал Буратино и отправил его в школу, дав ему на букварь несколько деревянных рублей, не более 30 штук. Буратино продал все рубли коллекционерам по 150 сольдо за каждый. Пять сольдо он сунул себе за щеку, не более трех закопал на поле Чудес, а на оставшиеся купил хлеба по цене 51 сольдо за корочку. Сколько корочек хлеба купил Буратино?

28. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел.

2. КОМБИНАТОРИКА

При решении задач этого раздела используется одно или одновременно два из следующих правил комбинаторики:

1. <u>Правило суммы</u>. Если объект А может быть выбран m способами, а объект В другими n способами, то выбор " либо А, либо В" может быть осуществлен m+n способами.

2. <u>Правило произведения</u>. Если объект А может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект В в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор "А и В" в указанном порядке может быть осуществлен m·n способами.

Выборки

<table>
<tr><td rowspan="3">Без повторений – набор некоторого конечного числа различных элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$</td><td rowspan="2">Упорядоченные выборки («цепочки»)</td><td>Размещения $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$</td></tr>
<tr><td>Перестановки $P_n = n!$</td></tr>
<tr><td>Неупорядоченные выборки («кучки»)</td><td>Сочетания без повторений $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">С повторениями – произвольная группа k элементов из генеральной совокупности с повторениями</td><td rowspan="2">Упорядоченные выборки («цепочки»)</td><td>Размещения n различных классов по k элементов $\overline{A_n^k} = n^k$</td></tr>
<tr><td>Перестановка из n элементов с повторениями $\overline{P_{k_1,k_2,\dots,k_l}} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_l!}$</td></tr>
<tr><td>Неупорядоченные выборки («кучки»)</td><td>Сочетания с повторениями $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$</td></tr>
</table>

Задачи

1.(о) Из города А в город Б ведут две дороги, из А в Г - четыре дороги, из Б в В - три дороги, из Г в В - пять дорог, между Б и Г дорог нет. Сколько различных дорог ведет из А в В через Б? Сколько вообще разных дорог из А в В?

2.(о) В отделе канцтоваров продаются 5 видом ручек и три вида блокнотов. Сколькими способами можно купить блокнот с ручкой?

3.(о) В том же отделе продаются еще 4 различных набора фломастеров. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?
4. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (два коня, два слона, две ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?
5. Сколько различных слов (последовательностей букв) можно получить, переставляя буквы слов

а) «вектор»;

б) «линия»;

в) «парабола»;

6.(о) Сколькими способами можно переставить буквы слова «девушка» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке?
7. Сколькими способами можно выбрать команду из 3 человек в классе, в котором учатся 30 учеников?
8. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды?
9.(о) Монетку бросают трижды. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?
10.(о) В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее количество зубов равно 32)?
11.(о) В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалиниями. Сколько авиалиний в этой стране?
12. Сколько различных диагоналей в выпуклом n-угольнике?
13. На плоскости отмечены 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
14.(о) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску следующие фигуры так, чтобы они не били друг друга?

а) черную и белую ладью;

б) две черных и две белых ладьи;

в) черного и белого короля.

15.(о) Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?
16.(о) Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный, либо часть в белый и часть в черный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они ни переворачивались)
17. Сколько имеется 4-значных натуральных чисел, которые не делятся на 5?
18.(о) Сколько существует 4-значных натуральных чисел, в записи которых встречаются только нечетные цифры?
19.(о) Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?
20.(о) Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ - различные простые числа. Сколько делителей (включая 1 и q) имеет число $q = p_1^{\alpha_1} \cdot\ p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot\ p_n^{\alpha_n},$ где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - некоторые натуральные числа.
21.(о) а) Сколькими способами можно посадить за круглый стол три юноши и три девушки так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

б) А если они садятся не за стол, а на карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими?

22. Сколько ожерелий можно составить из пяти одинаковых бусинок и двух большего размера?
23. а) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата - черный и белый?

б) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадрат, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

24. Найти количество шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых не более двух нечетных цифр.

3. ПЛАНИМЕТРИЯ: ОТНОШЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И ПЛОЩАДЕЙ

Для решения планиметрических задач обязательно знание теорем Фалеса и Пифагора, признаков равенства и подобия треугольников. Надеемся, что перечисленные факты знакомы вам. Помимо этого, наиболее распространенные теоремы, используемые для решения задач, приведены как обязательные задачи.

Задачи

1.(о) Доказать, что медиана треугольника делит его на две равновеликие части.

2.(о) Если точка X делит сторону AB треугольника ABC в отношении p:q, то отрезок CX делит треугольник на части, отношение площадей которых также равно p:q.

3.(о) Отрезки, на которые биссектриса делит сторону треугольника, относятся друг так же, как прилегающие к ним две другие стороны треугольника

4.(о) Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как отношение произведений сторон, заключающих этот угол.

5.(о) В треугольнике ABC точка A_1 лежит на стороне BC, точка B_1 на стороне AC, причем $BA_1 : A_1C = 3 : 4$; $AB_1 : B_1C = 2 : 1$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найти, в каком отношении точка O делит отрезок AA_1.

6. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : CD = 1 : 2$. В каком отношении медиана CE делит отрезок AD?

7.(о) В треугольнике ABC на стороне AC задана точка B_1, делящая ее в отношении 3:2, считая от A. На отрезке BB_1 задана точка K, делящая этот отрезок в отношении 4:5, считая от B. Найти, в каком отношении прямая AK делит сторону BC.

8. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла C и пересекающая продолжение стороны AC в точке D. Пусть E - середина отрезка BD. Определить, в каком отношении прямая AE делит площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = b$, $BC = a$.

9.(о) В треугольнике ABC стороны $AB = 5$ и $AC = 3$; AK – биссектриса угла A. Из точки K проведена прямая, параллельная AB, до пересечения с AC в точке E. Найдите AE.

10. Точки M и N расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $BM : MA = 4 : 5$. Прямая MN пересекает прямую AC в точке K и известно, что $MN:NK = 3:5$. В каком отношении точка N делит сторону BC ?

11.(о) В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC, а точка M на стороне BC расположена так, что BM : MC = 1:2. Прямая, проходящая через точку M параллельно стороне AB, пересекает отрезок BK в точке O, причем BO : OK = 7:3. Найдите отношение, в котором точка K делит сторону AC

12. В треугольнике ABC высота BH и медиана CE пересекаются в точке O. Известно, расстояние что $BO=4$; $OH=1$; $CE=5$. Найдите сторону AB..

13.(о) В параллелограмме ABCD точка K делит сторону BC в отношении 2:3, считая от B, а точка L делит сторону CD в отношении 2:1, считая от C. Найти, в каком отношении отрезок AK делит отрезок BL.

14. Дана трапеция, в которой отношение оснований BC:AD=2:3. Точка M лежит на стороне AB, AM:MB=2:1. Точка N лежит на продолжении AD за точку D, DN:AD=1:3. Найти отношение, в котором отрезок MN делит сторону CD.

15. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 26 : 1, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника к которой эта биссектриса проведена, равна 7.

16. В прямоугольном треугольнике ABC точка M делит гипотенузу AC в отношении 1:3, считая от вершины A. Известно, что отрезок BM пересекает биссектрису AN в точке K так, что $AK = 3$, $KN = 1$. Найти стороны треугольника ABC.
17.(о) В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : KB = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : LB = 2 : 1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.
18.(о) Точки E, F, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC. Известно, что $AE = \frac{1}{3}AB$; $BF = \frac{1}{6}BC$; $AM = \frac{2}{5}AC$. Найти $S_{EFM}:S_{ABC}$.
19.(о) На продолжении медиан AK, BL, и CM треугольника ABC взяты точки P, Q и R так, что $KP = \frac{1}{2}AK$; $LQ = \frac{1}{2}BL$ и $MR = \frac{1}{2}CM$. Найти S_{PQR}, если $S_{ABC} = 1$.
20.(о) На стороне AB треугольника ABC взята точка K, а на стороне BC – точка L так, что CL : LB = 5. Площади многоугольников BKL и AKLC относятся как 5:37. Найти AK : KB.
21. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M так, что AM : MB = 3 : 2, а на стороне AC взята точка N так, что AN : NC = 2:3. Пусть O - точка пересечения прямых BN и CM. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника AOB равна 4.
22.(о) Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и P так, что AM : MB = BN : NC = CP : PA = 1 : 4. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного отрезками AN, BP и CM, к площади треугольника ABC.
23. A, B, C, D - последовательные вершины параллелограмма. Точки E, F, P, H лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD. AE = AB/3; BF =BC /3, а точки P и H делят пополам стороны, которых они лежат. Найти отношение площадей четырёхугольников EFPH и ABCD.
24.(о) Через середину M стороны BC параллелограмма ABCD, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найти площадь четырехугольника OMCD.
25. Площадь трапеции ABCD равна 30; основание AD вдвое больше основания BC. Точка P - середина стороны AB, точка R лежит на стороне CD; RD =2RC. Отрезки AR и DP пересекаются в точке Q. Найти площадь треугольника APQ.
26. В пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна стороне DE, а сторона BC - стороне AE, причем $AB : DE = 8:5$, $BC : AE = 2:3$. Найти площадь треугольника ACD, если площадь четырехугольника $BCDE$ равна 21.
27. В ромбе $ABCD$ высоты BP и BQ пересекают диагональ AC в точках M и N (M между A и N), $AM = 7$, $MN = 3$. Найдите PQ
28. Внутри ромба $ABCD$ со стороной a и углом BAD в 60° выбрана точка P так, что площади треугольников ADP, ABP, BCP и CDP пропорциональны числам 1, 2, 5 и 4 соответственно. Найти расстояние от точки P до вершины A

4. ОЗНАКОМИТЕЛЬНАЯ ТЕМА:ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

Решение задач из этого раздела предполагает использование циркуля и линейки. Обычно при решении задач на построение придерживаются схемы, состоящей из четырех этапов: анализа, построения, доказательства и исследования.
Анализ подразумевает поиск решения задачи путем установления зависимостей между данными элементами (фигурами) и искомым элементом (фигурой).
Построение состоит в последовательном перечислении простейших построений, а также некоторых типичных, наиболее часто встречающихся построений. К ним можно отнести:

- отложить на луче от его начала отрезок, равный данному отрезку;
- отложить от данного луча угол, равный данному;

- построить биссектрису угла;
- построить серединный перпендикуляр данного отрезка;
- построить середину данного отрезка и т. п.

При этом выполняется чертеж.

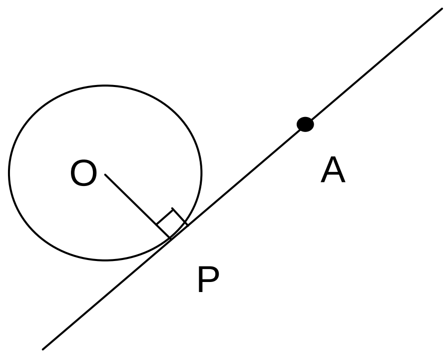
Доказательство устанавливает, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям, поставленным в задаче.

Исследование предполагает дать ответы на следующие вопросы. При всяком ли выборе данных задача имеет решение? Сколько различных решений имеет задача при каждом возможном выборе данных?

Для иллюстрации приведем пример.

Задача. Даны окружность (*O,r*) и точка *A*, не лежащая на ней.

Построить касательную к окружности, проходящую через точку А.



Решение:

1) Анализ. Допустим, задача решена, и прямая а - искомая касательная, *P* - точка касания. Так как угол *OPA* - прямой, то задача сводится к построению точки *P* на окружности (*O,r*), из которой отрезок *OA* виден под прямым углом. Точка *P* лежит на окружности, построенной на отрезке *OA* как на диаметре.

2) Построение.

Проводим прямую *OA*.

Строим середину *M* отрезка *OA*.

Строим окружность (*M, MA*).

Находим точки пересечения *P* и *Q* окружностей (*O, r*) и (*M, MA*).

Проводим прямые *AP* и *AQ* - касательные.

3) Доказательство. Угол *OPA* равен углу *OQA* и равен прямому, поэтому $AP \perp OP$ и $AQ \perp OQ$. Отсюда следует, что *AP* и *AQ* - касательные к окружности (*O, r).*

4) Исследование. Если окружности (*O, r*) и (*M, MA*) не имеют общих точек, то решений нет. Это возможно, если точка А лежит внутри окружности (*O, r*). Тогда $OA < r$ или $2OM < r$, следовательно, окружности не пересекаются, и задача не имеет решений.

Если точка А лежит вне окружности, то $OA > r$ или $2OM > r$, окружности пересекаются в двух точках. Задача имеет два решения.

Основные методы решения задач на построение

1. Метод пересечений или метод геометрических мест точек. Сущность метода пересечений состоит в следующем. Задачу сводят к построению одной точки X (основного элемента построения), которая удовлетворяет каким-то двум условиям α_1 и α_2, вытекающим из постановки задачи. Пусть F_1 - множество точек, удовлетворяющих условию α_1, а F_2 - множество точек, удовлетворяющих условию α_2. Тогда искомой точкой *X* будет любая точка множества $F_1 \cap F_2$.

2. Методы подобия, симметрии, параллельного переноса и т. п. основываются на преобразованиях плоскости. Метод подобия состоит в следующем. Сначала строят какую-нибудь вспомогательную фигуру, подобную искомой фигуре, так, чтобы она удовлетворяла всем условиям задачи, кроме одного. Затем строят искомую фигуру как фигуру, подобную построенной и удовлетворяющую опущенному условию.

Задачи

1. Построить множество точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом α, $\alpha \neq 180°$.

2. Даны отрезки *a, b* и *c*. Построить отрезок а) $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$; б) $y = \sqrt{a \cdot b}$; в) $z = \sqrt{a^2 \pm b^2}$, г) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$; д) $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

3. По заданным отрезкам a и b построить отрезок, длина которого равна среднему геометрическому их длин.

4. Построить общую касательную к двум окружностям.

5. Построить биссектрису угла с недоступной вершиной.

6. В данный треугольник вписать квадрат.

7. Внутри окружности задана точка A. Найти ГМТ середин всевозможных хорд, проведённых через точку A.

8. Лестница скользит по сторонам прямого угла – стене и полу. Котёнок, сидящий на середине лестницы, описывает некоторую линию. Что это за линия?

9. На плоскости даны две точки A и B. Одним циркулем построить середину отрезка AB.

10. Постройте треугольник по трем медианам.

11. С помощью циркуля и линейки построить окружность, вписанную в данный угол и проходящую через заданную внутри него точку.

12. Два поселка расположены по разные стороны реки. Где следует построить мост, чтобы путь из одного поселка в другой был самым коротким, если берега реки параллельные прямые, а мост строится перпендикулярно к ним?

Список литературы

- Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.
- Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки, г. Киров, изд-во АСА, 1994 г.
- Горбачев Н.В., Сборник олимпиадных задач по математике. М.:МЦНМО, 2004г.
- Зубелевич Г.И. Сборник задач московских математических олимпиад. М.: Просвещение, 1971.
- Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Часть 1. М.: Наука, 1991.

Составители: Булгакова Т.Е., Петрова О.П.